

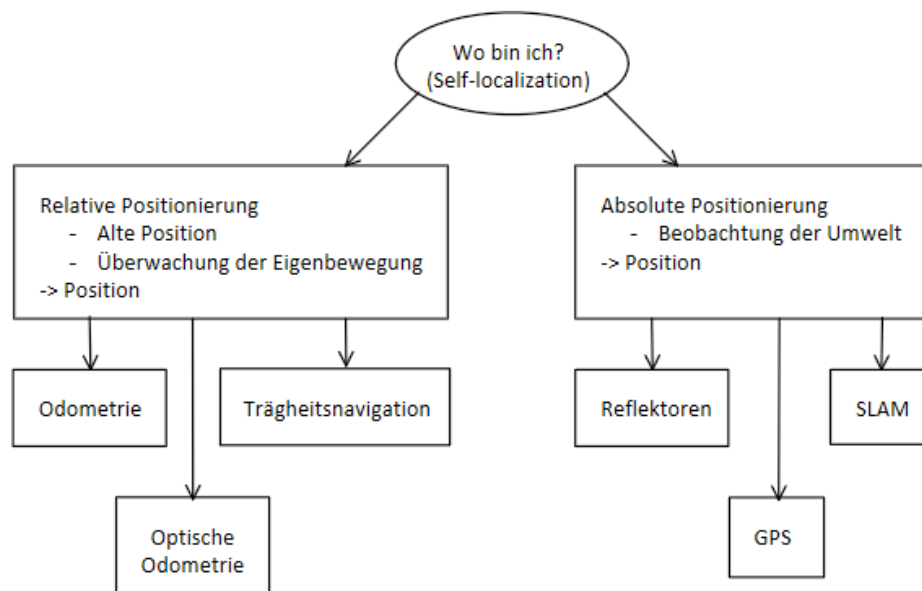
Mobile Roboter – Odometrie und kinematische Transformationen

Ein mobiler Roboter bewegt sich in einer Umgebung, die dem Roboter oft unbekannt ist. Man muss die aktuelle Position des Roboters schätzen können, damit man einen Pfad definieren und planen kann.

Das Navigationsproblem kann daher in drei Fragestellungen zusammengefasst werden:

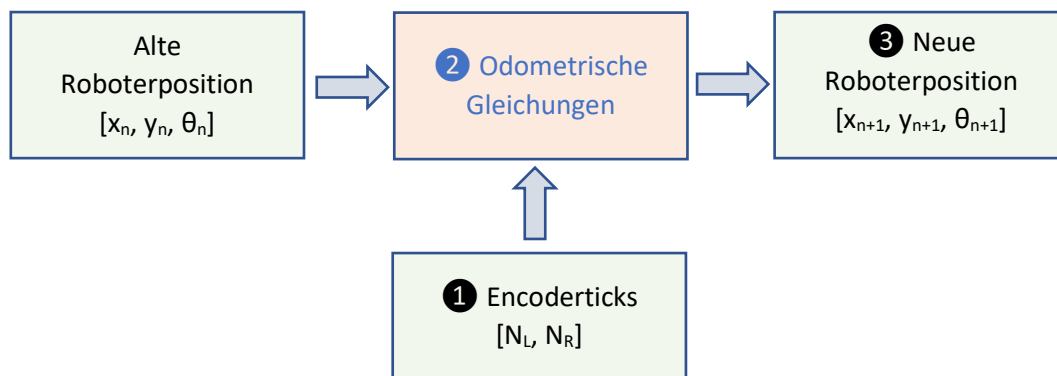
1. Wo bin ich? (Self-localization)
 - Relative Positionierung mit internen Sensoren
 - Absolute Positionierung anhand von Marken
2. Wohin soll ich gehen? (Task Planning)
3. Wie komme ich dahin? (Path Planning)
 - Karten
 - Pfadplanung

In diesem Skript konzentrieren wir uns auf die erste Fragestellung. Bei der Standortbestimmung wird zwischen relativer und absoluter Positionierung unterschieden. Für beide Arten gibt es unterschiedliche technische Lösungen, die am Ende des Skripts kurz erläutert werden. Wir gehen nun detaillierter auf die Odometrie ein, welches zu den relativen Positionierungen gehört.



Odometrie

‘Odometrie’ bezeichnet eine Methode der Schätzung von Position und Orientierung (Lageschätzung) eines mobilen Systems anhand der Daten seines Vortriebsystems. (Quelle: Wikipedia)



- ① Encoderticks können relativ zu einer bekannten Position erfasst werden (Inkrementalgeber) oder dann absolut (Absolutwertgeber).
 - Inkrementalgeber: Angabe der relativen Position der Achse durch auszählen der Impulsfolge. Bei Spannungsausfall geht die Positionsinformation verloren.
 - Absolutwertgeber: Die Position ist durch eine in der Hardware codierte Positionscode gegeben. D.h. in jeder Position kann die Position aus dem Positionscode rekonstruiert werden, ohne Kenntnis einer vorhergehenden Position.
- ② Die odometrische Gleichungen beinhalten die Bestimmung der neuen Position des mobilen Roboters. Aus den Encodersignalen (inkremental / absolut) wird die aktuelle Position bestimmt (Numerische Integration der inkrementellen Bewegung, Dead Reckoning).
- ③ Die mittels der Daten aus den Encodern ermittelte neue Position ist mit einer Unschärfe behaftet. Dies resultiert u.a. aus der Messunsicherheit der Encoder, der Abweichung der realen physikalischen Situation vom gewählten mathematischen Modell. Als einfaches Beispiel sei hier die Abweichung der nominalen Raddurchmesser zu den realen Raddurchmessern des mobilen Roboters genannt. Bleiben wir bei den Rädern so kann sich der Raddurchmesser (Gummi) durch die Abnutzung ändern etc.

Vielfach begegnet man den Begriffen relative Positionsbestimmung, inkrementale Wegmessung, absolute Wegmessung.

Fährt ein mobiler Roboter (z.B. den Robotino an der HLF) aus der Position $[x_n, y_n, \theta_n]$ in die Position $[x_{n+1}, y_{n+1}, \theta_{n+1}]$, so wird diese neue Position anhand der Encodersignale relativ zur vorhergehenden Position bestimmt, dies entspricht der relativen Positionsbestimmung.

Da die Odometrie die Berechnung der relativen Position des Roboters mittels Beobachtung der Antriebsräder ist, ist diese Berechnung antriebsabhängig. Es verändert sich also je nach Konfiguration und Anzahl der Räder vom Fahrzeug.

Um die Odometrie berechnen zu können, muss man zuerst folgende Fragenstellungen überarbeiten:

- Wie stellt man die Position eines mobilen Roboters dar?
- Wie berechnet man die direkte Kinematik eines einfachen Fahrzeuges?
- Welche Rädertypen und welche Eigenschaften haben diese?
- Wie muss man vorgehen, um die Kinematik eines komplexeren Fahrzeuges zu berechnen?

Darstellung der Roboterposition

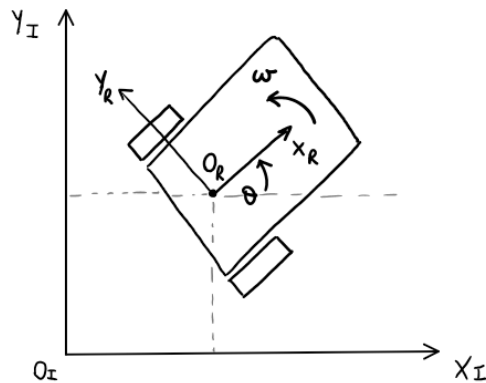


Abbildung 1: Koordinatensysteme

Wir modellieren den Roboter als ein Starrkörper auf Rädern. Um die Position des Roboters zu bestimmen, müssen wir ein Zusammenhang zwischen globalem Referenzsystem und Roboter Referenzsystem.

O_I : Ursprung des globalen Koordinatensystems

O_R : Ursprung des Koordinatensystems des Roboters

Die Position P des Roboters in globalen Koordinaten ist definiert durch die Koordinaten X und Y und die Winkeldifferenz θ zwischen den zwei Frames.

Unter Frame wird hier ein Koordinatensystem verstanden, das man sich mit einem Gegenstand fest verbunden denkt. So kann jeder Gegenstand im Arbeitsraum hinsichtlich Position und Orientierung durch seinen Frame beschrieben werden. Die relative Lage der Gegenstände zueinander wird durch Transformationen zwischen den Frames beschrieben.

Wir definieren die Position Pose als: $\xi_I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$

Und die Rotationsmatrix, die die Bewegung im globalen Koordinatensystem zum Roboterkoordinatensystem mappt.

Aus der Abbildung 1 geht hervor, dass die Rotation um die z-Achse stattfindet:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das gilt unter der Bedingung, dass der Roboter nur in x und y Richtung fahren kann und um die z Achse drehen kann ($v_z=0$ und $w_x=w_y=0$).

Die Geschwindigkeitskomponenten können somit vom globalen in das Robotersystem transformiert werden:

$$\dot{\xi}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Übung: Berechnen Sie die Rotationsmatrix und die entsprechende $\dot{\xi}_R$ bei $\theta = \pi/2$, als Funktion der globalen Geschwindigkeit $\xi_I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$.

Modell direkte Kinematik

In dieser Sektion wird das Modell der direkten Kinematik für einen mobile Roboter mit Differentialantrieb aus den vorher bestimmten Matrizen hergeleitet.

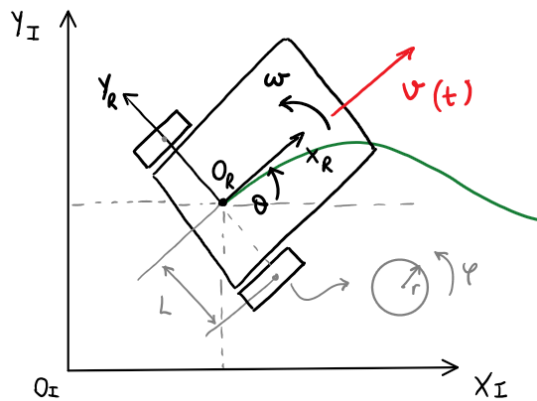


Abbildung 2: Berechnung direkte Kinematik

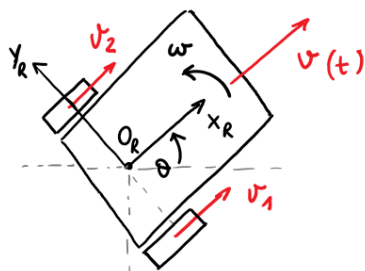
O_I : Ursprung des globalen Koordinatensystems
 O_R : Ursprung des Koordinatensystems des Roboters

$\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ = Drehgeschwindigkeit der zwei Räder
 r = Radius Räder
 L = Abstand Rad zu O_R

Die Geschwindigkeit des Roboters im globalen Koordinatensystem ist eine Funktion von den oben genannten Variablen:

$$\dot{\xi}_I = R(\theta)^{-1} \dot{\xi}_R = f(L, r, \theta, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2)$$

Um $\dot{\xi}_R$ zu bestimmen, können wir den Beitrag der zwei Räder separat betrachten:

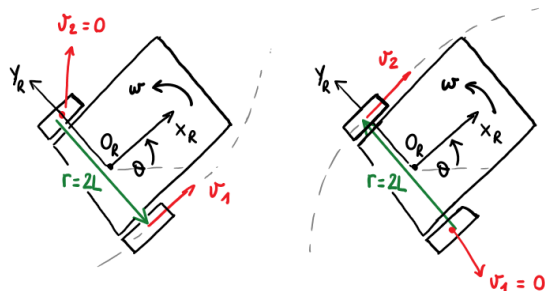


$$v_2 = 0 \rightarrow \dot{x}_R = \frac{v_1}{2} = \frac{\dot{\phi}_1 r}{2}$$

$$v_1 = 0 \rightarrow \dot{x}_R = \frac{v_2}{2} = \frac{\dot{\phi}_2 r}{2}$$

$$\text{Dies führt zu: } \dot{x}_R = \frac{\dot{\phi}_1 r}{2} + \frac{\dot{\phi}_2 r}{2}$$

In y-Richtung ist der Beitrag der zwei Räder null, deshalb: $\dot{y}_R = 0$
 (Translation, Roboterkoordinatensystem)



$$v_2 = 0 \rightarrow \omega = \frac{v_1}{2L} = \frac{\dot{\phi}_1 r}{2L}$$

$$v_1 = 0 \rightarrow \omega = -\frac{v_2}{2L} = -\frac{\dot{\phi}_2 r}{2L}$$

$$\text{Dies führt zu: } \dot{\theta}_R = \omega = \frac{\dot{\phi}_1 r}{2L} - \frac{\dot{\phi}_2 r}{2L}$$

(Drehbewegung, Roboterkoordinatensystem)

Die Kinematik des Differentialantrieb lässt keine Bewegung in Richtung y_R im Koordinatensystem des mobilen Roboters zu. Es wird bei obiger Betrachtung von einer konstanten Geschwindigkeit im Abschnitt $t_n \rightarrow t_{n+1}$ ausgegangen.

Der Roboter kann daher durch diese Gleichung beschrieben werden:

$$\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = R(\theta)^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{\phi}_1 r}{2} + \frac{\dot{\phi}_2 r}{2} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\dot{\phi}_1 r}{2L} - \frac{\dot{\phi}_2 r}{2L} \end{bmatrix}$$

Positionsberechnung

Bei der Odometrie wird die Position im Raum über die Daten des Vortriebsystems hergeleitet.

Durch die kinematische Beziehung können wir alle Vortriebsbewegungen der Antriebe in eine globale Geschwindigkeit des Fahrzeugs berechnen. Die Geschwindigkeit muss somit nur noch integriert werden, um eine relative Verschiebung im Raum zu erhalten.

$$\Delta \xi_I = \int \dot{\xi}_I * dt$$

Ist die Anfangsposition bekannt, so kann auf die absolute Position geschlossen werden:

$$\xi_I = \xi_{I,0} + \int \dot{\xi}_I * dt$$

In zeitdiskreten Systemen wird die neue Position elementweise addiert.

$$\xi_{I,n} = \xi_{I,0} + \sum_{x=0}^n \dot{\xi}_{I,x} * dt_x$$

Fehlerquellen in der Odometrie

Bei bekanntem Bewegungsmodell und der Information über die Bewegung sollten wir in der Lage sein, die Position des Roboters jederzeit bestimmen zu können. Es gibt aber Fehler, die die Schätzung der Position verfälschen können (Wegdriften über den Weg).

Systematische Fehler (d.h. der Mittelwert der Fehler ist ungleich 0, kalibrierbar!)

- Unterschiedliche Raddurchmesser oder Mittelwert des Raddurchmessers ist nicht gleich wie der nominelle Wert führen zum Addieren von systematischen Fehlern
- Versatz der Räder (misalignment)
- Limitierte Encoderauflösung
- Limitierte Encoder Abtastrate

Unsystematische Fehler durch eine stochastische Welt

- Addieren von zufälligen Fehlern
- Fahren über unebene Böden oder unerwartete Objekte
- Radschlupf aufgrund von:
 - o Rutschige Böden
 - o Überbeschleunigung
 - o Schnelles Drehen (skidding)
 - o Externe Kräfte (Interaktion mit externen Körpern)
- Nicht punktueller Radkontakt mit dem Boden

Andere Formen der relativen Positionierung

Neben der Odometrie gibt es andere Formen der relativen Positionierung, wie zum Beispiel die sogenannte Trägheitsnavigation. Diese Art von Navigation basiert auf die Messung von Geschwindigkeit, Beschleunigung und Orientierung mittels Inertial Navigation Systems (INS).

Diese Navigation ist besonders verwendet auf Fahrzeuge oder Robotersysteme ohne Räder, wie z.B. Schiffe, Flugzeuge, Drohnen und Humanoide. Man kann aber auch die Informationen der Odometrie und der INS kombinieren, um gewisse Fehler der Odometrie zu kompensieren und eine genauere Positionsschätzung zu berechnen.

Absolute Positionierung

Ein anderer Ansatz ist die absolute Positionierung des Roboters anhand natürlicher oder künstlicher Landmarken mit bekannter Position.

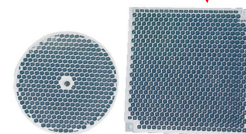
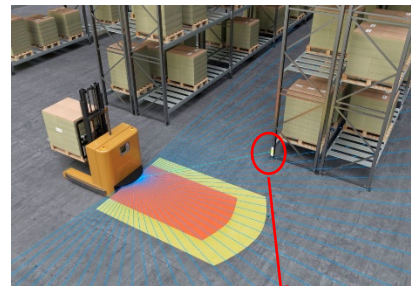
Eine Landmarke ist ein Objekt/Merkmal mit folgenden Eigenschaften:

- Wahrnehmbar (Funktion der Sensorik, blickwinkelabhängig)
- Informationsgehalt (Eindeutigkeit)
- Bekannte Position im Weltmodell
- Relative Position zum Roboter bestimmbar (bspw. Entfernung und Richtung zur Landmarke, Entfernungsdifferenz zweier Landmarken, Detektionsbereich eines RFID o.ä.)

Natürliche Landmarke können Bergspitzen, Bäume, Wände, Türen, Ecken und Säulen sein. Künstliche Landmarken werden explizit für Navigationszwecken installiert und können aktiv oder passiv sein.

Beispiele von passiven Landmarken:

- Barcodes
- RFID Labels
- Reflektoren



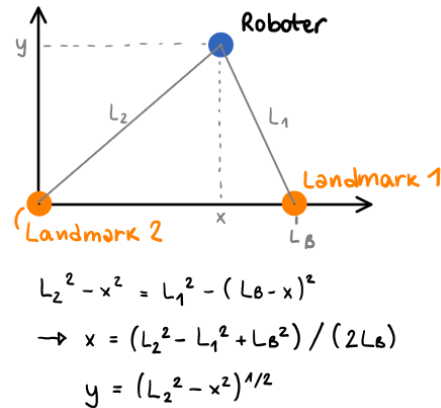
Beispiele von aktiven Landmarken:

- Leuchttürme
- Radiobeacons
- Induktionsstreifen
- Laser
- GPS



Die Positionsbestimmung mittels Landmarken hat Vorteile wie die Zuverlässigkeit der Messung und die einfache Informationsverarbeitung. Es hat aber auch einige Nachteile, z.B. die Umgebung muss modifiziert werden, es gibt hohe Wartungs- und Installationskosten und es muss die direkte Sicht zu den Landmarken immer gewährleistet werden.

Ein einfaches Beispiel von Positionsbestimmung durch Landmarken ist die **Trilateration**: die Position wird bestimmt durch Entfernungsmessung oder Winkelmessung zu bekannten Landmarken.



Positionsbestimmung mittels Abstandsmessung und Winkelmessung kann mit Lidar Sensoren realisiert werden. Diese Sensordaten können in SLAM Algorithmen (Simultaneous Localization and Mapping) eingesetzt werden, um eine Karte der Umgebung zu erstellen.

Positionsbestimmung mittels nur Winkelmessung kann z.B. mit Omni-Kameras und Optical SLAM realisiert werden. Wenn man sonst nur mittels Abstandsmessung die Position bestimmen will, dann kann man GPS (GNSS) und UWB (Ultra Wide Band) beacons einsetzen.

Fazit

Ziel dieses Skriptes war, eine Übersicht über Basis Konzepte der mobilen Robotik zu geben; insbesondere wie man die Position eines Roboters mittels Odometrieberechnung schätzen kann.

Für diejenige, die diese Themen vertiefen möchten, wird folgende Literatur empfohlen:

- Introduction to Autonomous Mobile Robots, Second Edition, I. R. Nourbakhsh, R. Siegwart, D. Scaramuzza.
- Entsprechende Folien Online:
https://asl.ethz.ch/education/lectures/autonomous_mobile_robots/spring-2020.html

Bibliographie

- Introduction to Autonomous Mobile Robots, Second Edition, I. R. Nourbakhsh, R. Siegwart, D. Scaramuzza.
- Navigation mobiler Systeme, Dipl.-Inform Ingo Boersch in LV "Autonome Mobile Systeme"

Räder und ihre kinematischen Randbedingungen / Constraints

Jedes Rad beeinflusst mit dem Vortrieb die Bewegung des Roboters. Sie können aber auch je nach Art bewegungseinschränkend für das ganze System sein. Folgende Räder sind die meistverwendeten Räder bei mobilen Robotern. Dabei ermöglichen die verschiedenen Konfigurationen unterschiedliche Bewegungsmodi, wie Tangentialbewegungen entlang einer Trajektorie, mögliche Drehungen auf der Stelle, oder omnidirektionaler Pose-Änderung. Je nach Räderzahl und Typen ergeben sich unterschiedliche Fahrzeug Konfigurationen und die Berechnung der Odometrie muss dementsprechend angepasst werden.



Standard Rad



Castor Rad



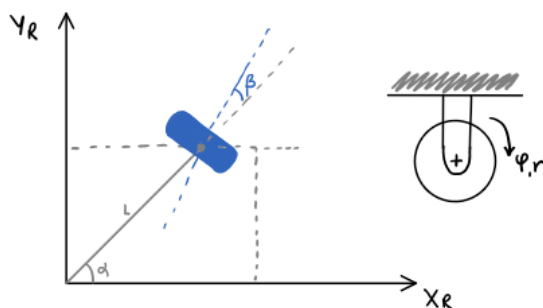
Mecanum Rad



Omni Rad

Alle Räder haben eine Rollrichtung, welche beim Drehen des Rades die Richtung der Bewegung angibt. Gewisse Räder lassen auch orthogonal (senkrecht) zur Rollrichtung eine Gleitbewegung zu. Wird ein Gleiten mechanisch nicht akzeptiert, so schränkt dieses Rad die Bewegungsfreiheit des Fahrzeugs ein. Für eine allgemeine Definition müssen für alle eingesetzten Räder beide Richtungen interpretiert werden. Diese lassen sich je als Matrix beschreiben.

Fixed Standard Wheel

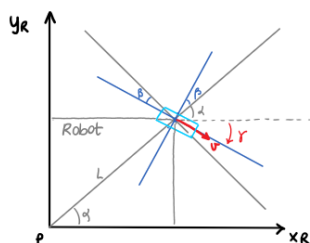


Rollbedingung:

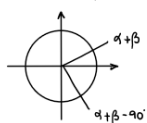
Die Bewegung entlang der Radebene ist gleich der (zurückgelegte Weglänge) Bewegung des drehenden Rades.

Gleitbedingung:

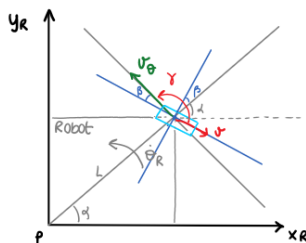
Es ist keine Bewegung orthogonal zur Radebene erlaubt.



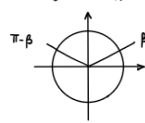
$$\gamma = (\alpha + \beta) - 90^\circ$$



$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta - 90^\circ) = \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta - 90^\circ) = -\cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$



$$v_\theta = \dot{\theta}_R \cdot L ; \gamma = \pi - \beta$$



$$\begin{cases} \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta \\ \sin(\pi - \beta) = \sin \beta \end{cases}$$

Rollen: Vektorkomponenten Rad
Drehrichtungssachse

$$\begin{aligned} \dot{x}_R \cos(\pi - \beta) &= \dot{x}_R \sin(\alpha + \beta) \\ \dot{y}_R \sin(\pi - \beta) &= -\dot{y}_R \cos(\alpha + \beta) \\ \dot{\theta}_R L (-\cos(\beta)) \end{aligned}$$

Gleiten: Vektorkomponenten
orthogonal zu Rad Drehrichtung

$$\begin{aligned} \dot{x}_R \cos(\alpha + \beta) \\ \dot{y}_R \sin(\alpha + \beta) \\ \dot{\theta}_R L \sin(\beta) \end{aligned}$$

Die Rollrichtung wirkt radial zum Antriebsrad:

$$\text{Rollen: } [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -L \cos(\beta))] \dot{\xi}_R = r \dot{\phi}$$

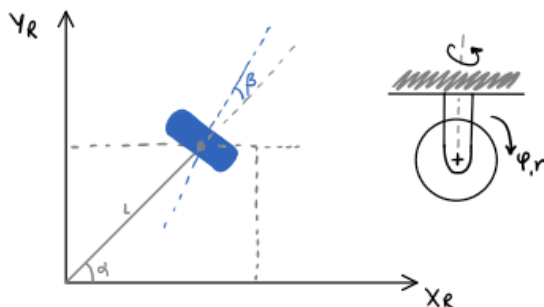
$$\rightarrow [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -L \cos(\beta))] R(\theta) \dot{\xi}_I = r \dot{\phi}$$

Ein Gleiten ist hier nicht erlaubt, somit wird Gleichung null gesetzt.

$$\text{Gleiten: } [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad L \sin(\beta))] \dot{\xi}_R = 0$$

$$\rightarrow [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad L \sin(\beta))] R(\theta) \dot{\xi}_I = 0$$

Steered Standard Wheel



Rollbedingung:

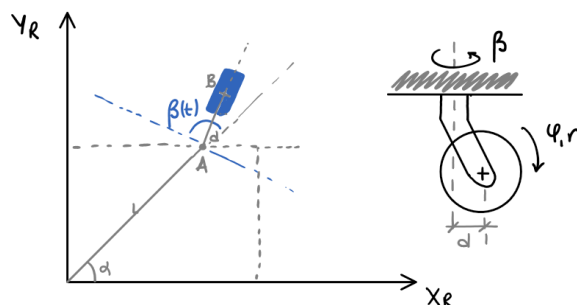
Die Bewegung entlang der Radebene ist gleich der Bewegung des drehenden Rades.

Gleitbedingung:

Es ist keine Bewegung orthogonal zur Radebene erlaubt.

Übung: Wie kann man die Constraints und die Eigenschaften von diesem Rad darstellen? Was ist der Unterschied zum Fall 'Fixed Standard Wheel'?

Castor Wheel



Dieses Rad kann um die vertikale Achse drehen, aber der Kontaktpunkt zum Boden liegt nicht auf der Rotationsachse.

Rollbedingung:

Gleich wie bei fixed standard wheel

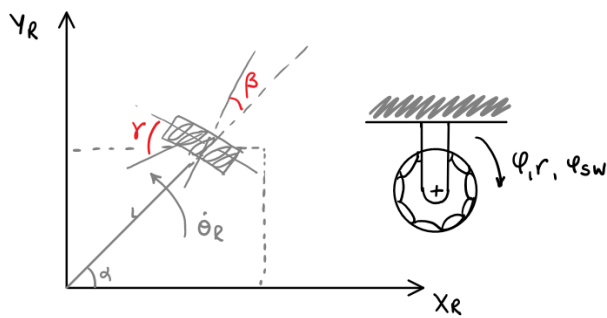
Gleitbedingung:

Bewegungen orthogonal zur Rad Rollrichtung sind möglich. Dabei gleitet nicht das Rad, sondern die Achse B dreht mit Abstand d um den Radmittelpunkt.

$$\text{Rollen: } [\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -L \cos(\beta))] R(\theta) \dot{\xi}_I = r \dot{\phi}$$

$$\text{Gleiten: } [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + L \sin(\beta))] R(\theta) \dot{\xi}_I = -d \dot{\beta}$$

Swedish Wheel und OmniWheel



Rollrichtung: Die Rollrichtung ist abhängig von der Anordnung der kleinen Räder. Sie wirkt nur in Achsrichtung der kleinen Räder. Sind diese schräg angebracht, so kann nur ein Teil der Radbewegung auf den Boden gebracht werden.

Gleitrichtung: ist orthogonal der Achsrichtung der kleinen Räder. Da diese uneingeschränkt drehen können, ist hier ein Gleiten zulässig.

Rollen: $[\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad -\cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad -L \cos(\beta + \gamma)] R(\theta) \dot{\xi}_I = r \dot{\phi} \cos(\gamma)$

Gleiten: $[\cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad \sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad L \sin(\beta + \gamma)] R(\theta) \dot{\xi}_I = r \dot{\phi} \sin(\gamma) + r_{sw} \dot{\phi}_{sw}$

Roboter-kinematische Randbedingungen /Constraints

Räder können durch fehlende Gleitbedingungen die Roboterbewegung einschränken. Man kann daher die kinematische Einschränkung des Fahrzeuges aufgrund der Anzahl, Typ und Position der Räder auf dem Roboter bestimmen.

«Castor wheels» und «Swedish wheels» lassen ein Rutschen zu. Somit haben nur «fixed standard wheels» und «steerable standard wheels» einen Einfluss auf kinematische Einschränkungen des Roboters.

Mit allen Rollbedingungen und den einschränkenden Rutschbedingungen lässt sich das System bequem in einer Matrix darstellen.

Allgemeine Gleichung der Randbedingungen: $\begin{bmatrix} J_1(\beta_s) \\ C_1(\beta_s) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} J_2 \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}$

Rollbedingungen:

Bei der Betrachtung der Rollbedingungen wurde folgende Gleichung berücksichtigt:

$$[Constraint Matrix] R(\theta) \dot{\xi}_I - r \dot{\phi} = 0$$

Man kann nun alle Rollbedingungen in einer einzigen Gleichung darstellen, wie folgt:

$$J_1(\beta_s) R(\theta) \dot{\xi}_I - J_2 \dot{\phi} = 0$$

- J_2 ist eine NxN diagonale Matrix mit dem Radius der Räder auf der Diagonalen:

$$J_2 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & r_n \end{bmatrix}$$

- J_1 besteht aus den Projektionen für alle Räder von ihren Bewegungen entlang der Radebenen. In J1 werden die Rollbedingungen der eingesetzten Räder dargestellt:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -L \cos(\beta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Gleitbedingungen:

Bei der Betrachtung der Gleitbedingungen wurde folgende Gleichung berücksichtigt:

$$[Constraint\ Matrix] R(\theta) \dot{\xi}_I = 0$$

Man kann nun alle einschränkenden Rollbedingungen in einer einzigen Gleichung darstellen, wie folgt:

$$C_1(\beta_s) R(\theta) \dot{\xi}_I = 0$$

- C_1 besteht aus den Projektionen für alle Räder von ihren Bewegungen orthogonal zur Radebenen, welche die Roboterbewegung einschränken. Somit wird diese Matrix für «fixed-wheels» und «steering-wheels» erstellt.

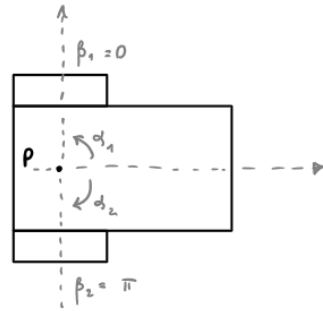
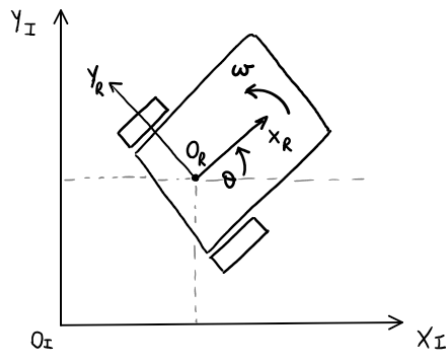
$$C_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & L \sin(\beta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Die Gleichung der Rollbedingungen definiert einen Zusammenhang zwischen Radgeschwindigkeiten und Geschwindigkeit des Roboters im globalen Koordinatensystem:

$$J_1(\beta_s) R(\theta) \dot{\xi}_I - J_2 \dot{\phi} = 0$$

Das erlaubt, die globale Geschwindigkeit des Roboters zu schätzen und durch Integration auch seine Position. Diese Gleichung wird nun in zwei Beispielen eingesetzt.

Beispiel Differential Antrieb



Constraints Gleichung: $\begin{bmatrix} J_1(\beta_s) \\ C_1(\beta_s) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} J_2 \dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}$

Fahrzeug Konfiguration:

- zwei fixed standard Wheels
- ein Castor Wheel, nicht aktiv angesteuert und deshalb ignoriert
- $\alpha_1 = \pi/2, \alpha_2 = -\pi/2, \beta_1 = 0, \beta_2 = \pi$

$$J_1(\beta_s) = J_{1f} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1 + \beta_1) & -\cos(\alpha_1 + \beta_1) & -L \cos(\beta_1) \\ \sin(\alpha_2 + \beta_2) & -\cos(\alpha_2 + \beta_2) & -L \cos(\beta_2) \end{bmatrix}$$

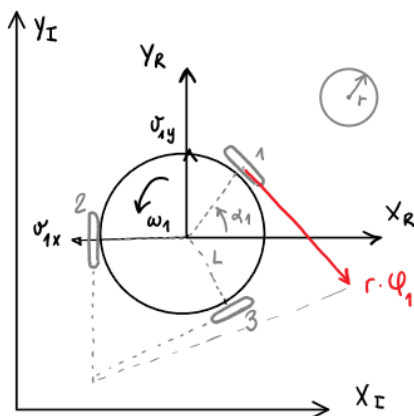
$$C_1(\beta_s) = C_{1f} = [\cos(\alpha_1 + \beta_1) \quad \sin(\alpha_1 + \beta_1) \quad L \sin(\beta_1)]$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

Da die Räder parallel sind, hat C_1 nur eine Zeile (gleiches Resultat bei beiden Räder).

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha_1 + \beta_1) & -\cos(\alpha_1 + \beta_1) & -L \cos(\beta_1) \\ \sin(\alpha_2 + \beta_2) & -\cos(\alpha_2 + \beta_2) & -L \cos(\beta_2) \\ \cos(\alpha_1 + \beta_1) & \sin(\alpha_1 + \beta_1) & L \sin(\beta_1) \end{bmatrix} R(\theta) \dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

Beispiel Omnidirektionaler Antrieb



$$J_{1f}(\beta_s) R(\theta) \dot{\xi}_I - J_2 \dot{\phi} = 0$$

$$\rightarrow \dot{\xi}_I = R(\theta)^{-1} J_{1f}(\beta_s)^{-1} J_2 \dot{\phi}$$

Fahrzeug Konfiguration:

- 3 Swedish Wheels, 90deg Wheel $\rightarrow \gamma = 0$
- $\alpha_1 = \pi/3, \alpha_2 = \pi, \alpha_3 = -\pi/3$
- $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
- $L = 1, r = 1, \theta = 0$

Übung:

Bestimmen Sie die Matrizen $J_{1f}(\beta_s)^{-1}$, $R(\theta)^{-1}$ und J_2 und berechnen Sie $\dot{\xi}_I$ bei $\dot{\phi}_1 = 4, \dot{\phi}_2 = 1, \dot{\phi}_3 = 2$